# *Circuitos eléctricos.*

Sttiwuer Díaz-Solórzano[a]

[a]*Grupo de Información y Comunicación Cuántica, Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Edo. Miranda 89000, Venezuela.*

e-mail: sttiwuerdiaz@usb.ve, sttiwuer@yahoo.es

## Índice



## Índice de figuras



Se permite la copia parcial o total de este material instruccional siempre que sea con fines de enseñanza o investigación u otra finalidad académica, tanto por profesores e investigadores como por bibliotecas públicas no comerciales. Se permite citar libremente cualquier parte de este material, siempre y cuando se señale u otorgue explícitamente el crédito acostumbrado en las referencias. Se prohíbe la reimpresión y distribución parcial o total del material sin el debido consentimiento por escrito de los autores bajo cualquier circunstancias distintas a las antes descrita.
TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS
©2016, USB, Departamnto de Física.

# Índice de esquemas

## 1. Corriente eléctrica

En la naturaleza existen dos tipos de materiales que según su comportamiento eléctrico se pueden clasificar en *conductores de electricidad* y *aislantes*, estos últimos también son llamados *dieléctricos*. Enfocamos nuestra atención en el primer grupos de materiales, los cuales pueden definirse de la siguiente manera:

**Materiales conductores**

*Un material conductor es aquel que permite, con gran facilidad, el movimiento de carga bajo la presencia de campos eléctricos estacionarios y externo al conductor (Reitz, Milford, and Christy, 1996, pp. 36-37).*

Saveliev (1984, p. 103) establece que toda carga en movimiento constituye una *corriente*, y el proceso por el cual la carga se transporta recibe el nombre de *conducción*; este procesos de transporte de carga es lo que se conoce con el nombre de modelo clásico de conducción y dicho proceso puede darse a través de un sólido, un líquido o un gas. En el primer caso la corriente se genera debido al movimiento de carga en materiales metálicos o semiconductores; en cambio, la conducción a través de un líquido se conoce como electrólisis de manera que la corriente fluye por medio de electrólitos. En cambio, la conducción a través de gases recibe el nombre de descarga en gases. El objetivo de este material es describir algunas ideas referentes a la conducción de materiales sólidos, en particular, aquellos sólidos metálicos.

Todo exceso de carga que pudiese existir en un material conductor, en equilibrio electrostático, debe alojarse en la superficie del mismo produciendo un campo eléctrico perpendicular a la superficie de dicho material, tal distribución de carga garantiza que no exista campo eléctrico alguno dentro del conductor. Por consiguiente, bajo la condición de equilibrio electrostático no puede haber movimiento de carga dentro del conductor salvo aquel movimiento aleatorio que presente algunas cargas, y cualquier movimiento de carga dentro del material producen el choque entre ellas, dichos choques son los responsable de la energía térmica del material conductor. En tal sentido, al considerar una superficie imaginaria trazada dentro de dicho conductor se tendría que el movimiento de las cargas dentro de éste ocurre en forma aleatoria; esto se conoce con el nombre de movimiento Browniano. De manera que, al promediar el movimiento de las carga sobre la superficie imaginaria no se observaría un flujo neto de carga importante dentro del conductor, por los que el movimiento aleatorio de las cargas no genera una corriente significativa, y sus choques son responsable de mantener una temperatura en el material.

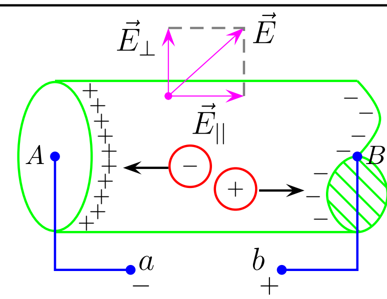



Figura 1.1: Conductor cilíndrico.

La situación antes descrita cambia radicalmente cuando se aplica en los extremos $A$ y $B$ de un conductor una diferencia de potencial $V_{AB} = V_A - V_B > 0\mathsf{V}$. Bajo esta nueva situación todo exceso de carga dentro y sobre la superficie de dicho conductor adquiere movimiento, la carga alojada en la superficie del conductor se distribuye de manera no uniforme, cuando esta carga deja de fluir la situación se convierte en estacionaria y la densidad superficial de carga genera un campo eléctrico estacionario con dos proyecciones: Una perpendicular a la superficie y la otra paralela a lo largo del eje del conductor, dichas proyecciones del campo eléctrico se denotarán como $\vec{E}_\perp$ y $\vec{E}_{||}$, respectivamente. Así, el campo electrostático debido a la distribución superficial no uniforme y sobre la superficie viene dado por

$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_{||}$, tal como se muestra en la Fig. 1.1; mientras que en el interior del material el campo eléctrico es esencialmente $\vec{E}_{||}$, ésta componente del campo es la responsable del movimiento continuo de cargas dentro del material conductor, acelerando cualquier exceso de carga desde un terminal al otro, en esta situación el exceso de carga positiva se aloja en el terminal $b$ mientras que un deficit de dicha carga se encuentra alojada en el terminal $a$. Por otra parte, el campo $\vec{E}_\perp$ es el responsable de mantener constante a la diferencia de potencial $V_{AB}$ entre los extremos del conductor (Jackson, 1996). Al considerar que $d\vec{l}$ es tangente al eje del cilindro se tendrá que la diferencia de potencial aplicada $V_{AB}$ esta relacionada con el campo eléctrico estacionario dentro del material, esto es,

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \left(\vec{E}_\perp + \vec{E}_{||}\right)\cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V_{AB} \equiv \int_A^B \vec{E}_{||}\cdot d\vec{l}. \tag{1.1}$$

Puesto que el campo eléctrico dentro del material es electrostático la integral es independiente de camino, y con ello se puede tomar la longitud del alambre $\ell$ sobre el conductor cilíndrico como camino de integración. Además, si se supone que la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}_{||}$ se mantiene constante dentro del conductor y éste siempre es paralelo al diferencial $d\vec{l}$, de manera que su orientación varia según la forma del alambre, se logra realizar la integral dada en (1.1) obteniéndose la siguiente expresión,

$$V_{AB} = E_{||}\ell \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_{||} = \frac{V_{AB}}{\ell}\,.} \tag{1.2}$$

Cabe destacar que al eliminar la diferencia de potencial en los extremos del conductor (es decir, $V_{AB} = 0$) no es posible mantener el campo eléctrico paralelo a la superficie del conductor, por lo que $\vec{E}_{||} = \vec{0}\frac{\mathsf{V}}{\mathsf{m}}$. Sin embargo, sigue conservándose el campo eléctrico perpendicular a la superficie $\vec{E}_\perp$ tal como ocurre para la situación de equilibrio electrostático. Así, la presencia del campo eléctrico $\vec{E}_{||}$ hace que las cargas positivas se desplacen dentro del material desde el terminal $A$ hasta el terminal $B$ (alojándose en $b$) y las negativas en dirección contraria (alojándose en $a$). Otra forma de establecer este movimiento es diciendo que la cargas positivas se mueven de una región de mayor potencial a menor potencial.

**Ejemplo 1.1** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Consideremos un conductor recto de longitud $R$ y otro conductor curvo en forma de una semicircunferencia de radio $R$, ambos conductores son sometidos a una misma diferencia de potencial $V_{ba} > 0\mathsf{V}$ en sus extremos, tal y como se indica en la Fig. 1.2. Después de que la carga ha dejado de fluir por la superficie de ambos conductores se alcanzar un estado estacionario y se induce en el interior de cada material sendos campos eléctricos que se supondrán tangenciales a cada punto de sus respectivos alambres; además, sus correspondientes intensidades no cambia dentro de cada material. En esta situación,*

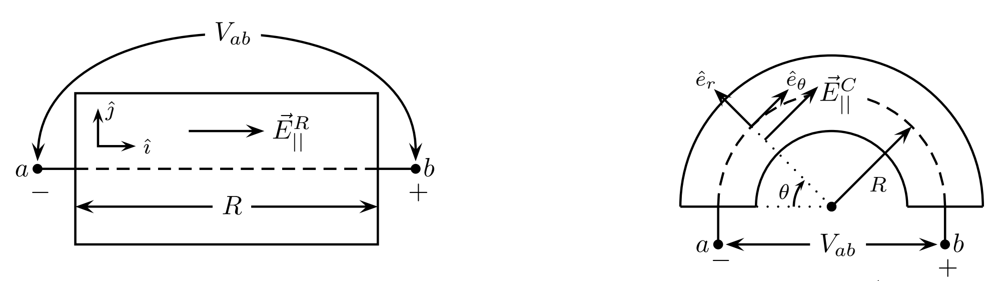



Figura 1.2: Se presenta el campo eléctrico dentro de un conductor recto (a la izquierda) y curvo (a la derecha), éste último tiene la forma de una semicircunferencia.

*la intensidad de cada campo eléctrico depende de la diferencia de potencial aplicada $V_{ba}$ y la longitud por donde circula el alambre. Así, para el alambre recto el campo eléctrico ($E^R_{||}$) es mayor que el campo ($E^C_{||}$) del curvo, en virtud de que:*

$$E^R_{||} = \frac{V_{ab}}{R} \quad y \quad E^C_{||} = \frac{V_{ab}}{\pi R} = \tfrac{1}{\pi} E^R_{||} \tag{I}$$

*Por otra parte, mientras que el campo eléctrico dentro del alambre recto es paralelo al versor $\hat{\imath}$, según se indica a la izquierda de la Fig. 1.2, el campo del alambre curvo dentro del material es paralelo al versor $\hat{e}_\theta$, donde $\theta$ describe el ángulo medido respecto al semi eje que conecta el centro del semi-aro con el extremo de menor potencial, tal como se indica a la derecha de la referida figura.*

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

El conjunto de cargas en movimiento dentro del conductor, como consecuencia del campo aplicado $\vec{E}_{||}$, reciben el nombre de portadores de carga y estas cargas pueden ser: Electrones (en la mayoría de los casos), iones de carga positiva, iones de carga negativa o partículas macroscópicas portadores de carga excedente (Saveliev, 1984). Por ejemplo, en metales los portadores de carga sería electrones.

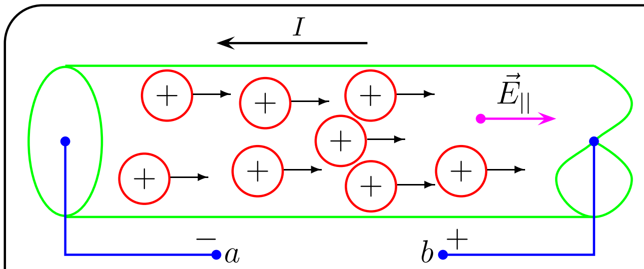


Figura 1.3: Portadores de carga positivos en movimiento dentro de un conductor.

En la Fig. 1.3 se ilustra el movimiento promedio de los portadores de cargas positivos dentro del material conductor, este movimiento promedio ocurre según la dirección al campo eléctrico estacionario $\vec{E}_{||}$ y hace que se acumule un exceso de estos portadores en el terminal $b$, mientras que los portadores de carga negativa se acumula en el terminal $a$. En consecuencia, el terminal $a$ se encuentra a menor potencial que el terminal $b$; así, $V_a \leq V_b$ entonces $V_{ab} \leq 0$. En este sentido, los terminales con signo positivo (negativo) indican que hay un deficit de portadores de carga negativa (positiva). El movimiento de los portadores de carga negativa dentro de un material conductor define el sentido de la corriente eléctrica; en este contexto se tiene

**Sentido de la corriente**

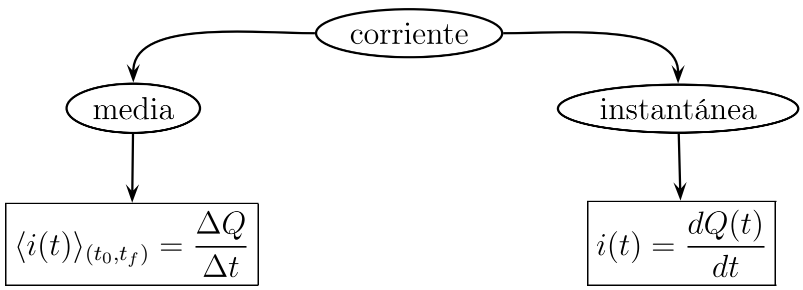
*La corriente eléctrica se considera como el flujo de carga transportada a través de la sección transversal de un conductor, este flujo se obtiene midiendo la velocidad con que la carga transportada atraviesa dicha superficie. Por convención se elige el sentido de la corriente como el seguido por el movimiento promedio de los portadores de carga negativa. Así, la corriente irá dirigida de forma tal que entra al terminal negativo y sale del terminal positivo.*

A continuación se muestra una tabla en la cual se presentan el tipo de magnitud, dimensión y las unidades asociada a la corriente en el sistema internacional y de la conversión asociada a la magnitud física corriente:

| Magnitud | Símbolo | Unidades | Dimensión | Conversión en SI |
|---|---|---|---|---|
| Escalar | $i$ o $I$ | A amperios | $[i] = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo}}$ | $1\text{A} \equiv 1\frac{\text{C}}{\text{s}}$ |

En el sistema internacional (SI) el amperio es una unidad fundamental, a diferencia del coulomb que corresponde a una unidad de deriva. Por lo que debe usarse en el sistema internacional el coulomb como el producto de amperio por segundo, esto es, $1\mathsf{C} = 1\mathsf{A}\cdot\mathsf{s}$. La unidad de corriente fue llamada así en honor al físico francés Andrés M. Ampére.

Existen al menos dos formas de medir la velocidad (Díaz-Solorzano and González-Díaz, 2010), denominadas como velocidad instantánea y media; la primera compara cambios infinitesimales mientras que la otra compara cambios finitos. En este contexto, existen al menos dos formas para medir la corriente eléctrica, conocidas como *corriente instantánea* y *corriente media*. La primera representa el movimiento de carga que pasa la sección transversal de un conductor en un instante de tiempo dado, mientras que la segunda representa el movimiento de carga neta que pasa a través de la misma sección transversal durante un intervalo de tiempo; por lo que puede obtenerse promediando o tomando el valor medio de la corriente instantánea. En el esquema 1.1 se muestran las medidas operacionales de dichos tipos de corrientes.




Esquema 1.1: Tipología para la corriente eléctrica en instantánea y media.

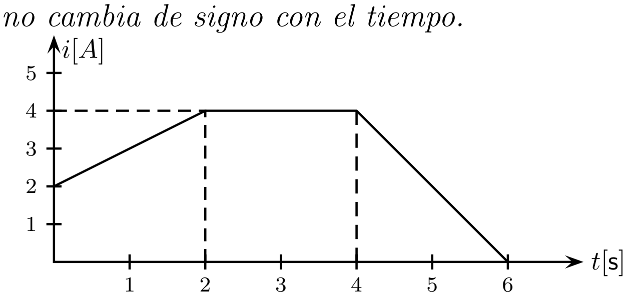
La corriente media se entiende como un promedio temporal de la corriente instantánea en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, esto es,

$$\langle i(t)\rangle_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} i(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dQ(t)}{dt}dt = \frac{Q(t_2)-Q(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,. \tag{1.3}$$

De lo expuesto arriba es claro que la corriente media coincide con la corriente instantánea cuando esta última permanece constante con el tiempo; en cuyo caso la carga cambia con el tiempo de manera uniforme, es decir, la carga varia con el tiempo según la forma $Q(t) = Q_0 + I_0 t$, siendo $Q_0$ la carga en $t = 0\mathsf{s}$ mientras que $I_0$ es la corriente continua. Una corriente es llamada *continua* o *corriente directa* cuando el movimiento de carga no cambia de sentido con el tiempo, es decir, el sentido de circulación siempre es la misma, aun cuando su valor o intensidad pueda cambiar con el tiempo.

**Ejemplo 1.2** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*En la figura de abajo se muestra una gráfica de una corriente directa, ya que ésta siempre es positiva y no cambia de signo con el tiempo.*




*Podemos preguntarnos sobre el valor de la corriente media para todo el intervalo, ésta corriente directa corresponde al valor medio de la corriente instantánea en dicho punto, la cual se determina con el área bajo la curva dividido por el intervalo de tiempos, esto es,*

$$\langle i(t)\rangle = \frac{2\mathsf{s}\cdot\frac{4+2}{2}\mathsf{A} + 2\mathsf{s}\cdot 4\mathsf{A} + \frac{2\mathsf{s}\cdot 4\mathsf{A}}{2}}{6\mathsf{s}-0\mathsf{s}} = 3\mathsf{A} \tag{I}$$

*Por otra parte, si conocemos la información de la carga inicial, digamos que $Q_0 = -3\mathsf{C}$, es posible determinar la carga en cualquier intervalo de tiempo durante los primeros seis segundos; bastaría integrar la ecuación de la corriente instantánea. Por ejemplo, la carga a los tres segundos viene dada por el área de la corriente entre $t = 0\mathsf{s}$ hasta $t = 3\mathsf{s}$, esto es,*

$$Q(3\mathsf{s}) = \int_{0\mathsf{s}}^{3\mathsf{s}} i(t)dt = 2\mathsf{s} \cdot \tfrac{4+2}{2}\mathsf{A} + 1\mathsf{s} \cdot 4\mathsf{A} = 10\mathsf{C} \quad \text{(II)}$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Otra visión alternativa para la corriente eléctrica es considerar el flujo de movimiento de carga que pasa a través de una sección transversal de un conductor, este flujo es debido a un campo vectorial llamado densidad de corriente, denotado como $\vec{J}(\vec{r}, t)$, el cual mide la cantidad de corriente por unidad de área, no obstante, este concepto será abordado en la próxima sección aunque se ha mencionado para caracterizar a la corriente eléctrica. Por otra parte, la corriente puede ser representada gráficamente por medio de una flecha, con la cual se puede identificar tres atributos: Intensidad o tamaño de la flecha, dirección, y sentido. No obstante, la corriente no es una cantidad vectorial, puesto que para que una flecha pueda ser considerada como un vector ésta debe cumplir la regla del paralelogramo; lo cual no ocurre para el caso de la corriente eléctrica. En el esquema 1.2 se indica la correlación entre la intensidad, dirección y sentido que se le asocia al concepto de corriente eléctrica.

Corriente eléctrica

- Intensidad → El valor absoluto de la razón de cambio entre la carga y el tiempo o del flujo de la densidad de corriente $\vec{J}$ que pasa a través de una sección transversal de un conductor.
- Dirección → La corriente es colineal al campo eléctrico $\vec{E}_{||}$ dentro del conductor, o a la densidad de corriente $\vec{J}$ que determina el flujo de carga que pasa por una sección transversal del conductor.
- Sentido → Según el movimiento de los portadores de carga negativo, esto es, la corriente es antiparalela al campo eléctrico $\vec{E}_{||}$ o a la densidad de corriente $\vec{J}$ que determina el flujo de carga que pasa por una sección transversal del conductor

Esquema 1.2: Identificación de la magnitud, dirección y sentido con la corriente eléctrica.

La Fig. 1.3, así como la del ejemplo anterior, es una visión simplificada del movimiento de carga. De hecho, la velocidad de los portadores de carga poseen dos contribuciones, por una parte se debe al equilibrio térmico con el medio y por otra parte debido a la acción del campo $\vec{E}_{||}$.La velocidad heredada por el movimiento térmico es aleatorio (Reitz, Milford, and Christy, 1996, p. 64) por esta no contribuye a un transporte de carga organizado. Según Portis (1985, pp. 171-172) este movimiento térmico es consecuencia de las colisiones existente entre las cargas transportadas y como todas las direcciones después de la colisión son igualmente probable entonces en promedio no habrá carga transportada. Pero el movimiento debido a la acción del campo $\vec{E}_{||}$ no es aleatorio, por consiguiente un conjunto de cargas llevarán un movimiento en común llamada *movimiento de deriva*, para el cual un conjunto de portadores de cargas se mueve con velocidad que en promedio es constante. En la figura 1.4 se muestra un portador de carga que choca con otros portadores,

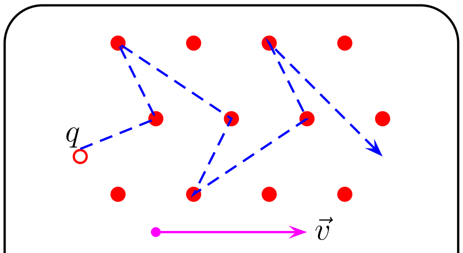



Figura 1.4: Movimiento de un portador de carga.

al promediar la velocidad de esta carga se obtiene una velocidad media indicada en la figura como $\vec{v}$, la cual se considera uniforme y recibe el nombre de **velocidad de arrastre** o también se conoce con el nombre de **velocidad de deriva**. La corriente generada por el movimiento de deriva recibe el nombre de corrientes de conducción (Reitz, Milford, and Christy, 1996).

## 1.1. Densidad de corriente

El flujo de carga puede visualizarse como la corriente que circula por la sección transversal de un conductor, por lo que se encuentra distribuida en dicha superficie. En este contexto, se puede definir una densidad (superficial) de corriente que atraviesa por una determinada superficie $\Sigma$; en tal sentido, la ***densidad de corriente*** local y media vienen definidas respectivamente por

$$J = \frac{di}{dA_\perp} \quad \text{y} \quad \langle J \rangle = \frac{i}{A_\perp}\,, \tag{1.4}$$

donde $di$ e $i$ son el elemento de corriente infinitesimal y la corriente que atraviesa perpendicularmente un elemento infinitesimal de área $dA_\perp$ y el área $A_\perp$, respectivamente. La densidad de corriente puede ser interpretada como un campo vectorial, cuya orientación se encuentra determinada según el movimiento de los portadores de carga negativos, por consiguiente la densidad de corriente tiene la misma orientación que la corriente eléctrica.

A continuación se muestra una tabla donde se presenta la magnitud, dimensión, unidad en el sistema internacional asociada a la magnitud física densidad de corriente:

| Magnitud | Símbolo | Unidades | Dimensión |
|---|---|---|---|
| vectorial | $\vec{J}$ | $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{m}^2}$ | $[J] = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo}\times\text{longitud}^2}$ |

Si la densidad de corriente local $\vec{J}$ es conocida en cada punto dentro de un conductor es posible determinar la corriente eléctrica que pasa a través de cualquier superficie arbitraria e imaginaria $\Sigma$ dentro de dicho conductor, esto puede determinarse mediante el flujo de la densidad de corriente sobre dicha superficie, esto es,

$$\boxed{i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{n}\,dA}. \tag{1.5}$$

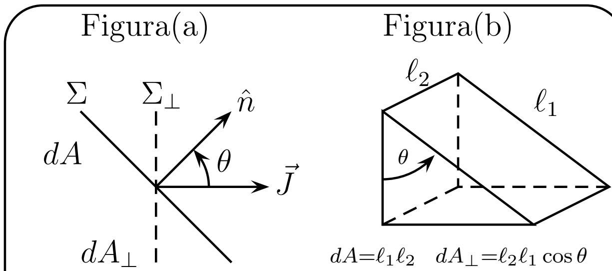



Figura 1.5: Corriente que atraviesa a través de dos superficies.

Para demostrar esta relación basta considerar dos elementos infinitesimales de la superficie $\Sigma$ y $\Sigma_\perp$, donde el segundo de estos elementos es perpendicular a la dirección del vector densidad de corriente tal como se ilustra en la Fig. 1.5a, el otro elemento formando un ángulo $\theta$ respecto al otro. Si $\ell_1$ y $\ell_2$ representan las longitudes del elemento de área de la superficie $\Sigma$, entonces $\ell_1\cos\theta$ y $\ell_2$ representarán las longitudes del elemento de área de la superficie $\Sigma_\perp$ (ver Fig. 1.5b), de manera que,

$$dA_\perp = \ell_2\ell_1\cos\theta = dA\cos\theta\,, \tag{1.6}$$

donde $dA$ y $dA_\perp$ denotan los elementos infinitesimales de área para las superficies $S$ y $S_\perp$, respectivamente. Al sustituir esta relación en (1.4) y despejar el elemento de corriente $di$ resulta que,

$$di = |\vec{J}|dA_\perp = |\vec{J}|dA\cos\theta = \vec{J}\cdot\hat{n}\,dA \quad \Longrightarrow \quad i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{n}\,dA$$

desde luego que se ha sustituido la proyección de la densidad de corriente $|\vec{J}|\cos\theta$ por $\vec{J}\cdot\hat{n}$. La expresión (1.5) pone en evidencia que la corriente puede ser interpretada como el flujo de la densidad de corriente; adicionalmente, el flujo presentado en (1.5) es efectuado sobre una superficie abierta de forma que existe una ambigüedad a la hora de tomar el vector normal $\hat{n}$, sin embargo, cuando la superficie es cerrada el vector normal $\hat{n}$ debe elegirse hacia el exterior de la superficie elegida.

Para el caso de superficies cerrada, la corriente generada por el flujo de $\vec{J}$ es debida a la corriente entrante y saliente, convencionalmente se utiliza que el conjunto de corriente saliente a la superficie cerrada son tomadas positiva y el conjunto de corriente entrante a la superficie son negativa, así:

$$i = i_{\text{sale}} - i_{\text{entra}} = \oint \vec{J}\cdot d\vec{A} \tag{1.7}$$

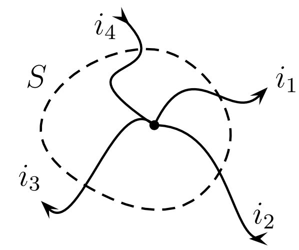



Figura 1.6: Superficie cerrada que encierra un conjunto de corrientes.

Por ejemplo, para la superficie cerrada $S$ que se muestra en la Fig. 1.6 se observan un conjunto de cuatro corriente; de la cuales $i_1$ e $i_3$ salen de la superficie $S$ y las corriente $i_2$ e $i_4$ entran a dicha superficie. Por consiguiente, la corriente $i = i_1 + i_3 - (i_2 + i_4)$. Si el flujo de la densidad corriente $\vec{J}$ es cero, esto se debe al balance entre la corriente entrante y la saliente, lo que equivale a decir que las cantidad de líneas del campo $\vec{J}$ que entran es igual a la cantidad de líneas que salen.

## 1.2. Densidad de corriente para portadores de carga

Ahora busquemos una expresión para la densidad de corriente bajo el modelo de corrientes de conducción, en dicho caso se considera que un conjunto de portadores de carga tiene movimiento constante con velocidad $\vec{v}$ después que las cargas han alcanzado el estado de equilibrio. Para ello, se contabiliza la cantidad de carga $\delta Q$ que atraviesa una superficie infinitesimal de área $dA$ como la mostrada en la Fig. 1.7, durante un intervalo de tiempo $\delta t$.Las cargas que han atravesado la superficie de área $dA$ en un intervalo de tiempo $\delta t$ han recorrido una distancia horizontal $\delta\ell = v_n\delta t$, donde $v_n$ es la proyección del vector velocidad en la dirección del vector $\hat{n}$ normal a la superficie; de manera que $\delta\ell = \vec{v}\cdot\hat{n}\delta t$. Así el volumen mostrado en la figura adjunta está dado por:

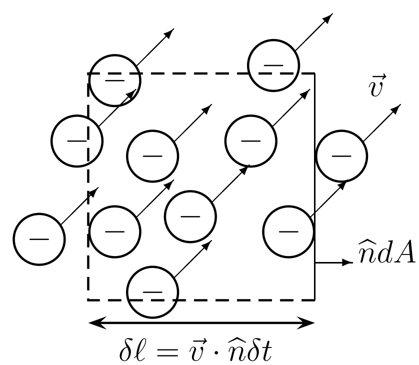



Figura 1.7: La cantidad de carga contenida en el volumen $\delta V$ que atraviesa el área $dA$.

$$\delta V = \delta\ell dA = \vec{v}\cdot\widehat{n}\delta t dA\,. \tag{1.8}$$

Considerando que la densidad volumétrica de carga $\rho$ está dada, entonces la cantidad de carga contenida en ese elemento de volumen es:

$$\delta Q = \rho\delta V = \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}\delta t dA\,, \tag{1.9}$$

así el elemento infinitesimal de corriente es:

$$di = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\rho\vec{v}\cdot\widehat{n}\delta t dA}{\delta t} = \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}dA \quad\Longrightarrow\quad i = \int_S \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}dA\,,$$

comparando esta expresión con (1.5), se identifica la **densidad de corriente** para un conjunto de portadores con densidad volumétrica de carga $\rho$ que se mueven, en promedio, con velocidad de arrastre $\vec{v}$ es:

$$\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}} \tag{1.10a}$$

Obsérvese que esta relación tiene en cuenta la densidad de carga de una especie de portadores y no contiene la información de varias especies de portadores, cuando se tiene un conjunto de varias especies con densidades volumétricas de carga $\rho_i$ y cada especie se mueve en promedio con una velocidad de arrastre $\vec{v}_i$, la densidad de corriente para este conjunto de portadores de diferentes especie es:

$$\boxed{\vec{J} = \sum_i \rho_i\vec{v}_i}. \tag{1.10b}$$

Si conocemos el número de portadores de cargas por unidad de volumen $n$, esto es:

$$n = \frac{\text{cantidad de carga transportada}}{\text{volumen donde se transporta la carga}} = \frac{N}{(\vec{v}_a \cdot \widehat{n}\delta t)dA} \tag{1.11}$$

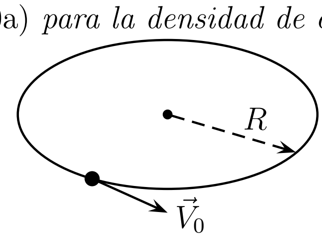
se logra obtener la densidad volumétrica de carga como:

$$\rho = nq = \frac{\text{carga neta}}{\text{volumen donde es transportada la carga neta}} \tag{1.12}$$

donde $q$ es la carga de un portador cuando se considera una sola especie de carga para la conducción.

**Ejemplo 1.3** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Un protón se mueve sobre una trayectoria circular de radio $R$ con rapidez constante $v_0$, la carga de protón es $e$ y su estructura interna puede ser considerada como una esfera de radio $a << R$. Obtenga la corriente que genera esta carga en un ciclo de su movimiento y a partir de este resultado encuentre la magnitud de la densidad de corriente. Luego obtenga el mismo resultado usando la expresión* (1.10a) *para la densidad de corriente.*




*La corriente se obtiene comparando la carga que pasa por un corte transversal del anillo en un período $T$, resultando:*

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{e\,\omega}{2\pi} = \frac{e\,v_0}{2\pi R}. \tag{I}$$

*donde se ha sustituido el período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la rapidez angular $\omega = \frac{v_0}{R}$. Así la densidad de corriente se obtiene comparando la corriente que pasa por un corte transversal del anillo, obteniéndose:*

$$J = \frac{i}{\pi a^2} = \frac{\frac{e\,v_0}{2\pi R}}{\pi a^2} = \frac{e\,v_0}{2\pi^2 a^2 R}$$

*donde*

$$\vec{J} = \frac{e\,v_0}{2\pi^2 a^2 R}\hat{\phi}, \tag{II}$$

*siendo $\hat{\phi}$ un vector unitario tangente al círculo y en la dirección de la velocidad del protón. Ahora al calcular $\vec{J}$ usando* (1.10a)*, el resultado es directo, puesto que:*

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho\vec{v} = \frac{e}{(2\pi R)(\pi a^2)}\,\vec{\omega}\times\vec{r} \\ &= \frac{e\,\omega R}{2\pi^2 R a^2}\,\hat{\phi} = \frac{e\,\omega}{2\pi^2 a^2}\,\hat{\phi} = \frac{e\,v_0}{2\pi^2 a^2 R}\hat{\phi} \end{aligned}$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 1.3. Ecuación de continuidad

En un volumen $\mathcal{D}$, que tiene como frontera una superficie $S$, se encuentra distribuida una carga $Q(t)$ cuya densidad volumétrica viene dada por $\rho(\vec{r}, t)$, tal como se muestra en la Fig. 1.8. Supongamos por simplicidad que la carga $Q(t)$ fluye hacia fuera de la superficie $S$, de manera que la carga decrece con el tiempo; con lo cual $\frac{dQ}{dt} < 0$. Este movimiento de carga genera una corriente, que por convenio se considera positiva cuando sale de $S$. Por ello, la corriente puede escribirse como

$$i = -\frac{dQ(t)}{dt}. \tag{1.13}$$

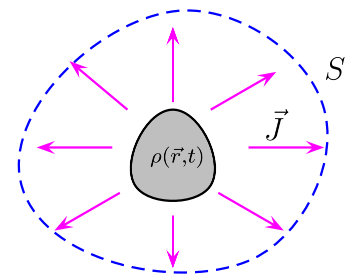



Figura 1.8: Flujo de carga saliendo de la distribución de carga.

Sustituyendo la expresión (1.5) en (1.13), y usando en el lado derecho de (1.13) que la carga puede escribirse como $Q(t) = \int_{\mathcal{D}} \rho dV$, se obtiene

$$\int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}\, dA = -\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}, t)\, dV\right]. \tag{1.14}$$

Usando el teorema de la divergencia en el miembro izquierdo de la igualdad e introduciendo dentro del signo de la integral la derivada total, debido a que el volumen es estacionario (independiente de tiempo), se llega a la siguiente expresión

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = -\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{D}} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dV = 0.$$

Para que la integral de arriba se anule, para cualquier volumen arbitrario $\mathcal{D}$, se requiere que el integrando se anule también; resultando la expresión local,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.15}$$

Las ecuaciones (1.14) y (1.15) reciben el nombre de *ecuación de continuidad* en su forma integral y diferencial, respectivamente, éstas constituyen la conservación de la carga. Obsérvese que al existir fuentes en una región del espacio la divergencia de la densidad de corriente es distinta de cero, en dicho caso se dice que en la región en cuestión hay fuentes o sumideros de corrientes. Por ejemplo, en la Fig. 1.8 se observa que la región $\mathcal{D}$ encerrada por la superficie $S$ hay una fuente de corriente. En tal sentido, se establece lo siguiente:

- Si la divergencia de la densidad de corriente es positiva ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} > 0$) en una región del espacio, y por tanto el flujo de corriente sale de dicha región, entonces la carga contenida en la región en cuestión debe disminuir con el tiempo.

- Si la divergencia de la densidad de corriente es negativa ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} < 0$) en una región del espacio, y por tanto el flujo de corriente entra a dicha región, entonces la carga contenida en la región en cuestión debe aumentar con el tiempo.

- En cambio, la divergencia de la densidad de corriente se anula ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$) por dos razones. La primera se debe a que las líneas de la densidad de corriente $\vec{J}$ que entran y salen de una superficie son iguales; por tanto el flujo se compensa y en dicha región no puede haber fuentes o sumideros de corriente. La segunda razón por la cual la divergencia de la densidad de corriente se anula surge cuando dentro de la superficie en cuestión hay carga pero esta no cambian con el tiempo.

La ecuación de continuidad en su forma diferencial e integral [ver ecuaciones (1.14) y (1.15)] establece la conexión entre la densidad de corriente y la densidad de carga volumétrica, por lo cual la densidad de carga $\rho(\vec{r},t)$ y la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r},t)$ no son arbitrarias; de hecho deben satisfacer (1.15) o bien su formulación integral (1.14).

## 1.4. Fuerza electromotriz (fem)

Saveliev (1984, pp. 107-109) establece que para mantener una corriente dentro de un conductor durante un tiempo suficientemente largo se debe retirar cargas de manera continuamente desde el extremo del conductor a menor potencial y agregándolas continuamente al otro extremo que se encuentra a mayor potencial, tal como se muestra en la Fig. 1.9, este movimiento continuo puede ser realizado por algún aparato o dispositivo que llamaremos fuentes de fuerza electromotriz (fem). En tal sentido, la fuerza electromotriz es la capacidad que tiene un dispositivo de mover carga de un lugar a otro para mantener una diferencia de potencial $\varepsilon$ o establecer una corriente en un circuito cerrado.

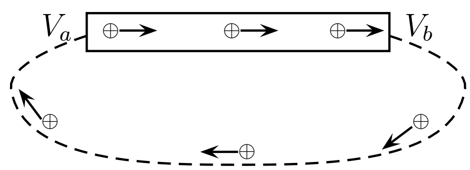


Figura 1.9: Portadores de carga debido a un campo eléctrico no electrostático.

Para poder suministrar estas cargas a un extremo, y extraerlas del otro, es necesario aplicar un campo eléctrico no electrostático, y con ello poder efectuar una circulación de carga a través de un camino cerrado como se observa en la Fig. 1.9. Lo cual está en completo acuerdo con el hecho de que las líneas de corriente son cerradas. Una línea de corriente es cerrada cuando la divergencia de la densidad de corriente es cero, es decir, $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, por lo cual las líneas de corriente no empiezan ni terminan en ninguna parte, y por tal razón el flujo de la densidad de corriente es cero cuando se evalúa a través de cualquier superficie cerrada. en este contexto, una fem no se consideran como un sumideros o fuentes de cargas, solo la transfiere de un lugar a otro. El transporte de esta carga debe ser realizado por un campo de origen no electrostático, puesto que la circulación del campo por el camino cerrado no se anula,

$$\varepsilon = -\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{1.16}$$

De acuerdo a (1.16) la fem presenta las mismas dimensiones que la diferencia de potencial, midiéndose en voltios (V) cuando se emplea el sistema internacional. El siguiente cuadro muestra las características básica de toda fem.

| Magnitud | Símbolo | | Dimensión | Unidades | Conversión |
|---|---|---|---|---|---|
| | Arábico | Icónico | | (MKS) | |
| escalar | $\varepsilon$ | $\dashv\vdash$ | $[\varepsilon]=\frac{\mathsf{ML}^2}{\mathsf{QT}^2}$ | V voltios | $1\mathsf{V}\equiv 1\frac{\mathsf{Kg\cdot m}^2}{\mathsf{C\cdot s}^2}$ |

En cuanto a la descripción simbólica empleada para la fem se tendrá además de la iconografía mostrada en el cuadro de arriba un elemento adicional representado por una flecha ($\xrightarrow{\varepsilon}$) que indica el movimiento de los portadores de carga positivos y negativos alojados en la placa de mayor y menor tamaño, respectivamente. Esto se indica colocando una flecha que va de la placa de menor tamaño (negativa) a la de mayor tamaño (positiva), tal como se indica en la Fig. 1.10. Por otra parte, cuando el recorrido del potencial se realiza a favor de la fem se tiene una subida en el potencial de la placa de mayor tamaño respecto de la placa de menor tamaño; recíprocamente, cuando el recorrido es en

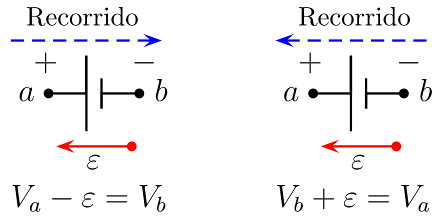



Figura 1.10: Se muestran dos posibles orientaciones en que puede recorrer una fem, a la izquierda (derecha) el recorrido es en contra (a favor) de la fem, por lo que se tiene una caída (subida) en el potencial del terminal $b$ con relación al terminal $a$.

contra de la fem hay una caída en el potencial de la placa de menor tamaño respecto a la otra placa, en contexto se dice que la placa de menor tamaño está a menor potencial que la placa de mayor tamaño, designado cada placa con los símbolos $-$ y $+$, respectivamente.

En cuanto al tipo de corriente eléctrica que pueden producir la fem éstas se pueden clasificar en tres tipos: Fuentes de Fuerza Electromotriz directa (fuentes C.D.) como las pilas, acumuladores, baterías solares entre otros; estas corrientes pueden suponerse como constante, pero en realidad lo que se considera es que dichas corrientes no cambian de sentido en periodos de tiempo muy largos. Fuentes de Fuerza Electromotriz alterna (fuentes C.A.) como los generadores eléctricos de los carros que son los encargados de proporcionar electricidad, cuando el vehículo está en funcionamiento o como las plantas generadoras de electricidad doméstica; en este caso las corrientes son denominadas como alternas cuando la magnitud y dirección varían cíclicamente o de acuerdo a una función sinusoidal. Y finalmente, las Fuentes de Fuerza Electromotriz variable no alterna. En este caso la corriente producida es variable (en el sentido de que su valor y sentido cambian con el tiempo), por ejemplo: el encendedor piezoeléctrico de la cocina produce una descarga eléctrica en el aire variable en intensidad y de muy corta duración.

## 2. Resistencia en conductores: Ley de Ohm

En muchos materiales (llamados óhmicos) se ha determinado que el cociente de la diferencia de potencial $V$ entre dos extremos de un material y la corriente $I$ que circula por el material para ir de un extremo al otro permanece constante para una temperatura fija, lo cual conduce a que existe una dependencia lineal entre la el voltaje $V$ y la corriente $I$, tal como se indica en la Fig. 2.11. Esta dependencia lineal se denomina "ley" de Ohm macroscópica, ésta tiene un rango de validez limitado, por ello no puede ser considerada estrictamente como una ley. De hecho, el cociente entre el voltaje y la corriente es característico de cada material, por lo que depende únicamente de sus propiedades como temperatura y geometría, dicho cociente es definido positivo y recibe el nombre de ***resistencia***, el cual denotaremos con la letra $R$. Así, la resistencia de un material viene dada por,

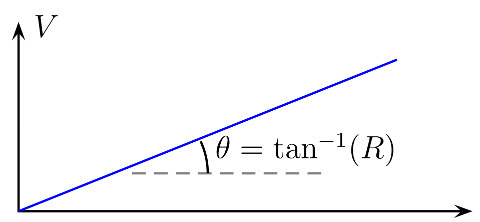



Figura 2.11: Se bosqueja la dependencia lineal entre el voltaje y la corriente para un material óhmico.

$$\boxed{R = \frac{V}{I}\,.} \tag{2.17}$$

Para este modelo se observa que el valor de la corriente $I$ disminuye cuando la resistencia $R$ es muy grande, manteniendo un valor fijo del potencial $V$. En cambio, la resistencia $R$ disminuye cuando se aumenta la corriente $I$, cuando se mantiene un valor fijo del potencial $V$. En tal sentido, se dice que los materiales óhmicos impiden el paso de corriente por un conductor. De lo antes expuesto, se establece la siguientes tendencias,

$$R \xrightarrow[I\to 0]{} \infty \qquad \text{y} \quad R \xrightarrow[I\to\infty]{} 0\,.$$

Esto sugiere que la corriente circulará por el camino de menor resistencia.

Otra forma de escribir la resistencia de un material es sustituyendo en (2.17) las definiciones de diferencia de potencial y densidad de corriente dadas en (1.1) y (1.5), respectivamente. Resultando la siguiente expresión,

$$R = \frac{-\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}{\int \vec{J}\cdot d\vec{A}}\,, \tag{2.18}$$

donde la integral de línea se toma entre dos superficies equipotenciales del conductor y la integral de superficie se evalúa sobre aquella que este a mayor potencial. Esta elección de superficies garantiza que el cociente dado en (2.18) sea positivo. Las expresiones (2.17) y (2.18) reciben el nombre de ley de Omh macroscópica, debido al famoso físico alemán Georg Simon Omh.

A continuación se muestra una tabla donde se presenta la magnitud física resistencia, el símbolo utilizado, la unidad en el sistema internacional de la magnitud física, la dimensiones involucradas en la magnitud física y la conversión en el sistema internacional:

| Magnitud | Símbolo Arábico | Símbolo Icónico | Unidades | Dimensión | Conversión |
|---|---|---|---|---|---|
| escalar positivo | $R$ | | $\underset{\text{óhmios}}{\Omega}$ | $[R] = \frac{\text{voltios}}{\text{amperios}}$ | $1\Omega \equiv 1\frac{\text{V}}{\text{A}}$ |

Los materiales con resistencia $R$ son llamados comúnmente ***resistores***. Los cuales impiden el paso de corriente produciendo una caída del potencial entre los extremos del mismo, así la corriente fluye de una región de mayor potencial a menor potencial. Por esta razón se considera el siguiente convenio: Cuando el recorrido por un resistor se hace a favor del sentido de la corriente se considera que hay una caída en el voltaje de los terminales del material, por tanto la diferencia de potencial ($V_{ba} = V_b - V_a$) entre los extremos del resistor es considerada negativa, ver Fig. 2.12 (izquierda). En cambio, cuando el recorrido por un resistor se realiza en contra del sentido de la corriente se considera que hay un alza en el voltaje de los terminales del material, por esta razón la diferencia de potencial ($V_{ab} = V_a - V_b$) entre los extremos del resistor es considerada positiva. Tal como se muestra en la Fig. 2.12 (derecha). En todo caso, las diferencias de potenciales $V_{ab}$ o $V_{ba}$ son independientes de la forma en que se realice el recorrido.

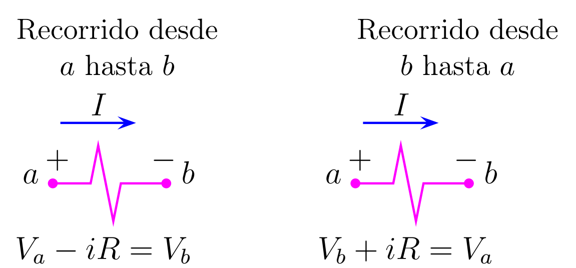


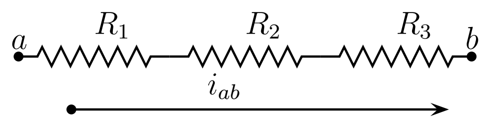

Figura 2.12: Se muestra que la diferencia de potencial entre los terminales de una resistencia es independiente del recorrido utilizado.

## 2.1. Asociación de resistores en serie y paralelo

Existen expresiones para asociar un conjunto de resistores colocados en serie y paralelo, y estas se obtienen de forma análoga a como se hizo en el tema de capacitores. El objetivo de esta sección es diseñar una estrategia para la simplificación de resistores en serie y paralelo, o una combinación de ello, con la finalidad de transformar toda la disposición en un solo resistor equivalente. El diseño de la estrategia se obtiene usando principios básicos como: La corriente que entra por un terminal $a$ y sale por otro terminal $b$ es la misma que la corriente equivalente ($I_{\text{eq}}$), por conservación de la carga; mientras que la diferencia de potencial entre dichos terminales es el mismo que el voltaje equivalente ($V_{\text{eq}}$).

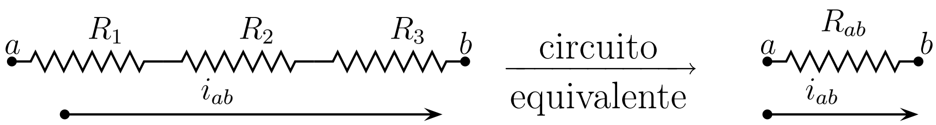
### Resistores en serie

Para comenzar, se presentan tres resistores con resistencia $R_1$, $R_2$ y $R_3$ dispuestos en forma consecutiva uno al lado del otro, los extremos de esta configuración se delimitan con los terminales $a$ y $b$, tal como se ilustra en la figura adjunta. La corriente que entra al terminal $a$ y sale por el terminal $b$ se denotará como $i_{ab}$, por lo que el terminal $a$ se encuentra a mayor potencial que el terminal $b$, en consecuencia $V_{ab} = V_a - V_b > 0\text{V}$. A su vez, la corriente $i_{ab}$ pasa por los tres resistores; siendo ésta la manera de identificar que la configuración de resistores dada se encuentra en ***serie***. Haciendo el recorrido desde el terminal $a$ hasta el terminal $b$ y teniendo en cuenta el convenido dado en la Fig. 2.12 resulta claramente que:




$$V_a - R_1 i_{ab} - R_2 i_{ab} - R_3 i_{ab} = V_b \quad \Longrightarrow \quad i_{ab} = \frac{V_{ab}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

donde $V_{ab} = V_a - V_b$ es la diferencia de potencial entre los terminales $a$ y $b$. Obsérvese que la corriente es positiva en virtud de que $V_a > V_b$. Para transformar el conjunto de los tres resistores dispuestos en serie entre los terminales $a$ y $b$ en un circuito equivalente, el cual consta de un resistor con resistencia equivalente $R_{\text{eq}} \equiv R_{ab}$ entre los terminales $a$ y $b$, se requiere que *la corriente que circula por el resistor equivalente sea igual a la corriente que circula entre los terminales a y b*, como principio básico, esto se ilustra pictoricamente de la siguiente forma




Usando la ley de Ohm para el circuito equivalente se tiene que la resistencia equivalente entre los terminales $a$ y $b$ es:

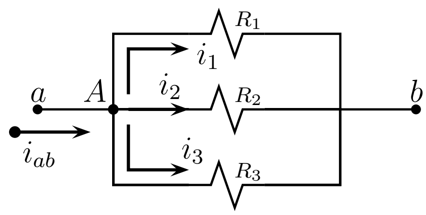
$$R_{ab} = \frac{V_{ab}}{i_{ab}} = \frac{V_{ab}}{\dfrac{V_{ab}}{R_1 + R_2 + R_3}} = R_1 + R_2 + R_3 \quad \therefore \quad R_{ab} = R_1 + R_2 + R_3$$

Finalmente, sobre la base de lo planteado arriba se logra extraer los tres principios fundamentales para la asociación de resistores en serie: ① La corriente que circula por el resistor equivalente es igual a la corriente que circula por el conjunto de resistores dispuestos en serie. ② La suma del voltaje en cada resistor dispuesto en serie es igual al voltaje del resistor equivalente. ③ La resistencia equivalente de un conjunto de resistores dispuesto en serie corresponde a la suma de la resistencia de cada resistor que conforma el circuito. Estas propiedades quedan expresadas en forma matemática en la siguiente tabla:

| Circuito en Serie | |
|---|---|
| Corriente | $i_{eq} = i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_N$ |
| Voltaje | $V_{eq} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N$ |
| Resistencia | $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N$ |

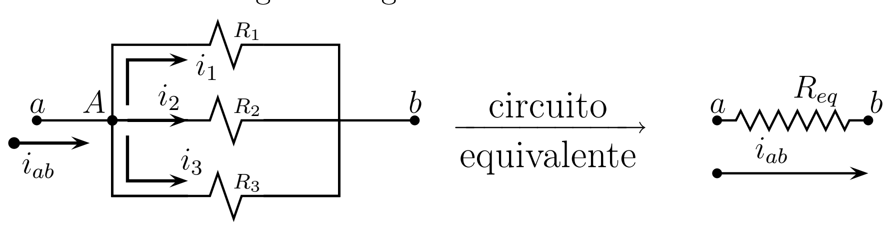
**Resistores en paralelo**

En la figura de abajo se presentan tres resistores con resistencia $R_1$, $R_2$ y $R_3$ dispuestos de manera tal que la diferencia de potencial en cada extremos de los resistores coincide con la diferencia de potencial entre los terminales $a$ y $b$ de la disposición mostrada, esto es, $V_1 = V_2 = V_3 = V_{ab}$, esta propiedad es la que permite identificar a los tres condensadores en ***paralelo***. figura adjunta. Si el terminal $a$ está a mayor potencial que el terminal $b$ ($V_a > V_b$), entonces la corriente $i_{ab}$ entra al punto $A$ (nodo) y ésta se divide en tres corrientes que denotaremos como $i_1$, $i_2$ e $i_3$, las cuales pasan por la resistencias $R_1$, $R_2$ y $R_3$, respectivamente. Este hecho es consecuencia de la conservación de la carga y constituye la idea básica enunciada en la primera ley de Kirchhoff. Aplicando este hecho y luego usando la "ley" de Ohm para sustituir la corriente como el cociente entre el voltaje y la resistencia se llega a:




$$i_{ab} = i_1 + i_2 + i_3 \quad \Longrightarrow \quad i_{ab} = V_{ab}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]$$

donde se ha usando que los voltajes son iguales $V_1 = V_2 = V_3 = V_{ab} \equiv V_a - V_b$. Obsérvese que la corriente es positiva en virtud a que $V_a > V_b$. Para transformar los resistores dispuestos en paralelos en un resistor equivalente entre los terminales $a$ y $b$, el cual denotaremos como $R_{\text{eq}} \equiv R_{ab}$, se requiere que *la corriente que circula por el resistor equivalente sea igual a la corriente que circula por los terminales $a$ y $b$*, tal como se ilustra en la siguiente figura.




Usando la ley de Ohm para el circuito equivalente se tiene que la resistencia equivalente es:

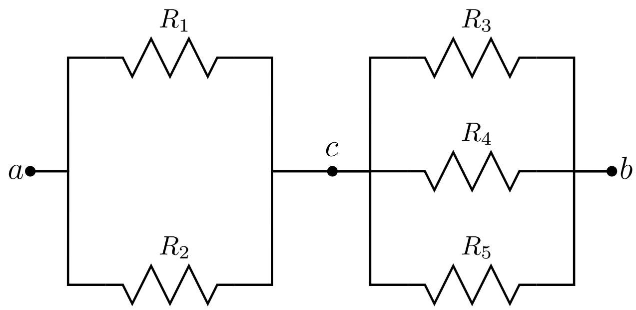
$$R_{ab} = \frac{V_{ab}}{i_{ab}} = \frac{V_{ab}}{V_{ab}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Finalmente, sobre la base de lo planteado arriba se logra extraer los tres principios fundamentales para la asociación de resistores en paralelo: ① La corriente que circula por el resistor equivalente es igual a la suma de la corriente que circula por cada resistor dispuestos en paralelo. ② El voltaje en cada resistor dispuesto en paralelo es igual al voltaje del resistor equivalente. ③ El inverso de la resistencia equivalente para un conjunto de resistores dispuesto en paralelo corresponde a la suma del inverso de cada resistencia que conforma el circuito. Estas propiedades quedan expresadas en forma matemática en la siguiente tabla:

| Circuito en Paralelo | |
|---|---|
| Corriente | $i_{eq} = i_1 = i_2 + i_3 + \cdots + i_N$ |
| Voltaje | $V_{eq} = V_1 = V_2 = V_3 = \cdots = V_N$ |
| Resistencia | $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}$ |

**Ejemplo 2.1** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Consideremos el circuito mostrado en la figura de abajo, donde $R_1 = 4R_0$, $R_2 = 2R_0$, $R_3 = R_0$, $R_4 = 3R_0$ y $R_5 = R_0$, siendo $R_0$ una constante positiva con dimensiones de resistencia. El objetivo es encontrar la resistencia equivalente $R_{ab}$ entre los terminales $a$ y $b$.*




*La resistencia equivalente entre los terminales $a$ y $c$ se obtiene de la asociación en paralelo de las resistencias $R_1$ y $R_2$, resultando que,*

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{4R_0} + \frac{1}{2R_0} = \frac{3}{4R_0} \ \therefore\ R_{ac} = \tfrac{4}{3}R_0 \qquad (\text{I})$$

*De igual forma, la resistencia equivalente entre los terminales $c$ y $b$ se obtiene a partir de la asociación entre las resistencias $R_3$, $R_4$ y $R_5$, resultando que,*

$$\frac{1}{R_{cb}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{3R_0} + \frac{1}{R_0} = \frac{7}{3R_0} \ \therefore\ R_{cb} = \tfrac{3}{7}R_0 \quad (\text{II})$$

*Finalmente, la resistencia equivalente entre los terminales $a$ y $b$ se obtienen de la asociación en serie de las resistencias $R_{ac}$ y $R_{cb}$, por lo que habrá que sumar* (I) *y* (I), *esto es,*

$$R_{ab} = \tfrac{4}{3}R_0 + \tfrac{3}{7}R_0 \ \therefore\ R_{ab} = \tfrac{37}{21}R_0 \qquad (\text{III})$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Para obtener las corrientes que pasa por cada elemento y los voltajes en cada resistencia en términos de la diferencia de potencial equivalente, podemos aplicar la siguiente estrategia: ① Se determina la resistencia equivalente mediante asociación de serie y paralelos. ② Luego se toma la última asociación antes de obtener la resistencia equivalente, si esta es serie se toma en cuenta que las corrientes son iguales, mientras que si es paralelo se toma en cuenta que los voltajes son iguales. Con ello se logra determinar alguna corriente o voltaje de algunos de los elementos. ③ Se repite el paso anterior tantas veces hasta que se llegue a la primera asociación realizada. En el siguiente ejemplo aplicaremos esta estrategia

**Ejemplo 2.2** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Supongamos que la diferencia de potencial en los terminales $a$ y $b$ del circuito mostrado en el ejemplo 2.1 es $V_{ab} = V_0$. La última asociación correspondió a la serie $R_{ac}$ y $R_{cb}$, y en esta asociación la corriente que pasa por cada una de dichas resistencias son iguales, en consecuencia se tendrá*

$$I_{ac} = I_{cb} = I_{ab} = \frac{V_{ab}}{R_{ab}} = \frac{21V_0}{37R_0} \qquad (\text{I})$$

*ahora, la resistencia $R_{cb}$ se obtuvo de la asociación en paralelo de las resistencias $R_3$, $R_4$ y $R_5$; y en esta asociación los voltajes son iguales, en conse-*

*cuencias se tendrá*

$$V_3 = V_4 = V_5 = V_{cb} = I_{cb}R_{cb} = \frac{9V_0}{37} \qquad \text{(II)}$$

*donde se ha sustituido la corriente $I_{cb}$, obtenida en* (I)*, y la resistencia equivalente $R_{cb}$, obtenida en* (II) *del ejemplo 2.1. Por otra parte, la última asociación del circuito mostrado en el ejemplo 2.1 correspondió al paralelo entre $R_1$ y $R_2$, y en esta asociación los voltajes son iguales, en consecuencia se tendrá*

$$V_1 = V_2 = V_{ac} = I_{ac}R_{ac} = \frac{28V_0}{37}, \qquad \text{(III)}$$

*donde se ha sustituido la corriente $I_{ac}$, obtenida en* (I)*, y la resistencia equivalente $R_{cb}$, obtenida en* (I) *del ejemplo 2.1. finalmente, al obtener los voltajes en cada resistor y con el valor de cada resistencia se obtienen las correspondientes corrientes. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.*

| Resistencias | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Voltajes | $\frac{28V_0}{37}$ | $\frac{28V_0}{37}$ | $\frac{9V_0}{37}$ | $\frac{9V_0}{37}$ | $\frac{9V_0}{37}$ |
| Corrientes | $\frac{7V_0}{37R_0}$ | $\frac{14V_0}{37R_0}$ | $\frac{9V_0}{37R_0}$ | $\frac{3V_0}{37R_0}$ | $\frac{9V_0}{37R_0}$ |

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 2.2. Conductividad y Resistividad

Como se ha mencionado, la resistencia de un resistor depende de las características del material tales como su temperatura y geometría. En otras palabras, la resistencia de un material no depende del voltaje aplicado en los terminales del resistor, ni tampoco de la corriente que circula entre dichos terminales; tal como se establece en la ley de Ohm (2.17) y (2.18). Para que tal situación ocurra es necesario que la resistencia no dependa del campo $\vec{E}$ dentro del material conductor, ni tampoco de la corriente $\vec{J}$ dentro del mismo, es decir, para materiales óhmicos la resistencia no depende de la naturaleza del campo eléctrico y de la densidad de corriente. Por esta razón, se debe establecer una relación constitutiva entre el campo y la corriente, la cual es de proporcionalidad cuando el material homogéneos e isótropo (materiales óhmicos). Tal relación constitutiva viene dada por,

$$\vec{J} = \bar{\sigma}\vec{E} = \frac{1}{\bar{\rho}}\vec{E}. \tag{2.19}$$

Donde la constante de proporcionalidad $\bar{\sigma}$, se conoce con el nombre de ***Conductividad*** y el inverso de ésta $\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{\sigma}}$ recibe el nombre de ***Resistividad***. La expresión (2.19) recibe el nombre de "ley" de Ohm microscópica. En general, la conductividad, y por tanto la resistividad, depende de diversos factores tales como la temperatura, la magnitud del campo eléctrico, o del espectro de frecuencia asociada a una radiación, etc. Inclusive, para medios anisótropos la densidad de corriente no será colineal al campo eléctrico. Sin embargo, esta consideración se encuentra fuera del alcance de esta notas, por lo que solo consideraremos que la conductividad es una función de la temperatura, esto es, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(T)$. De hecho, para un rango limitado de temperatura la resistividad de un material óhmico viene dada por la expresión

$$\bar{\rho}(T) = \bar{\rho}_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right]. \tag{2.20}$$

Siendo $T$ la temperatura del material medida en grados celsius, $\bar{\rho}_0$ la resistividad del material a temperatura $T_0$ y $\alpha$ es el coeficiente de ***resistividad térmica***.

Debido a (2.19) existe una conexión directa entre la resistividad y la resistencia de un material, esta puede obtenerse sustituyendo (2.19) en (2.18), así:

$$R = \frac{-\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}{\int \bar{\sigma}\vec{E}\cdot d\vec{A}} = \frac{-\int \bar{\rho}\vec{J}\cdot d\vec{\ell}}{\int \vec{J}\cdot d\vec{A}} \tag{2.21}$$

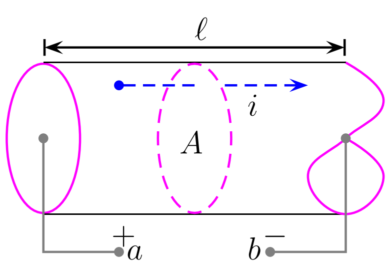
recordando que la integral de línea se toma entre dos superficies equipotenciales en el conductor y la integral de superficie se evalúa sobre aquella que este a mayor potencial, esto para garantizar que el cociente sea positivo. Adicionalmente, debe excluirse el caso para el cual el campo eléctrico o la densidad de corriente evaluado en la superficie de menor potencial se anule, ya que esto traería un valor infinito para la resistencia.

La unidad recíproca del ohmio ($\Omega$) recibe el nombre de siemenio o siemens ($\mathsf{S}$), a continuación se muestra una tabla donde se presenta las magnitudes físicas llamada conductividad y resistividad, el símbolo utilizado, la unidad en el sistema internacional de la magnitud física, la dimensiones involucradas en la magnitud física y la conversión en el sistema internacional:

| Nombre | Magnitud | Símbolo | Unidades | Dimensión | Conversión |
|---|---|---|---|---|---|
| Conductividad | escalar | $\bar{\sigma}$ | $\frac{\mathsf{S}}{\mathsf{m}}$ | $[\bar{\sigma}] = \frac{\text{siemens}}{\text{longitud}}$ | $1\frac{\mathsf{S}}{\mathsf{m}} \equiv 1\frac{1}{\Omega\cdot\mathsf{m}}$ |
| Resistividad | escalar | $\bar{\rho}$ | $\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{S}}$ | $[\bar{\rho}] = \frac{\text{longitud}}{\text{simens}}$ | $1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{S}} \equiv 1\Omega\cdot\mathsf{m}$ |

**Ejemplo 2.3** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Considere un conductor de longitud $\ell$ y sección transversal de área constante $A$. En los extremos del conductor se le aplica una diferencia $V_{ab}$, de manera que pueda circular una corriente continua $i$, desde el terminal $a$ hasta el terminal $b$ (ver la figura adjunta). Si la resistividad del material conductor $\bar{\rho}$ es conocida, encuentre la resistencia del material en términos de $\bar{\rho}$ y la geometría del mismo. La resistencia del material se verá modificada al cambiar la corriente y voltaje aplicado.*




*La magnitud del campo eléctrico $E_{||}$ que origina el movimiento de carga es consecuencia de la diferencia de potencial $V_{ab}$, sustituyendo (1.2) con la magnitud de (2.19) se obtiene que*

$$J = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{V_{ab}}{\ell}, \quad \text{como } J = \frac{i}{A}, \text{ entonces } \quad \frac{i}{A} = \frac{V_{ab}}{\bar{\rho}\,\ell},$$

*usando la ley de Ohm (2.17) resulta que:*

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \bar{\rho}\frac{\ell}{A} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R = \bar{\rho}\frac{\ell}{A}} \tag{I}$$

*expresión independiente de la diferencia de potencial y del voltaje aplicado en los extremos del conductor, esta expresión es totalmente válida para cualquier conductor de sección transversal constante. Una forma directa de llegar a esta relación es usando (2.21), en efecto:*

$$R = \frac{-\int_0^{\ell} E dx \cos 0}{\bar{\sigma}\int E dA \cos\pi} = \frac{-E\ell}{-\bar{\sigma}EA} = \frac{\ell}{\bar{\sigma}A} = \bar{\rho}\frac{\ell}{A}$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 2.3. Potencia asociada a un elemento de un circuito eléctrico

Los elementos de un circuito eléctrico como los resistores, capacitores, bobinas o las fuentes conectadas a un circuito, pueden absorber o suministrar energía al mismo. En particular, los materiales resistivos, como los resistores, siempre absorben o disipan energía al circuito transformándola en forma de calor. Tales afirmaciones pueden visualizarse al considerar el trabajo realizado por el campo eléctrico dentro del conductor para mover cargas $dQ$ desde una región de mayor potencial $V_a$ a una región de menor potencial $V_b$; dicho trabajo viene dado por,

$$dU \equiv W_{\vec{E}}^{[A,B;\mathcal{C}]} = dQ(V_b - V_a) = dQV_{ba}. \tag{2.22}$$

Donde $dU$ es la energía transferida por el campo eléctrico $\vec{E}$. La expresión (2.22) solo es válida para procesos cuasiestáticos, es decir, para aquellas situaciones en que los cambios de energía debido al campo eléctrico se efectúen de manera tal que el proceso para transferir cargas de una región a otra sea independiente de los caminos $\mathcal{C}$ que toman las cargas en cuestión. En otras palabras, la transferencia de energía $dU$, para un proceso cuasiestático, puede ser medida a través del trabajo realizado por un agente externo para mover a las cargas $dQ$ de un punto $A$ hasta otro punto $B$ sin que éstas adquieran aceleración. Por otra parte, la potencia por cualquier elementos de un circuito eléctrico viene dada por,

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}V_{ba} = V_{ba}i \Longrightarrow \boxed{P = V_{ba}\, i}. \tag{2.23}$$

La expresión (2.23) indica si la energía $U$ para un elemento del circuito corresponde a una función monótonamente creciente, decreciente o constante con el tiempo. En particular, si potencia es positiva (negativa) se establece que la energía crece (decrece); mientras que la energía se mantiene constante con el tiempo si la potencia es nula. Por ello, el signo de (2.23) se puede establecer si el elemento de un circuito está suministrando energía a dicho circuito, o por el contrario, si está absorbiendo energía del circuito. Además, la expresión (2.23) establece también cuando la energía se conserva. En tal sentido, se considera lo siguiente:

➢ Cuando la ***potencia es positiva*** (esto es, $P > 0$), el campo realizó trabajo sobre los portadores de carga de forma tal que la energía final aumento en relación a la energía inicial. Por consiguiente, se dice que el elemento del circuito ***suministró o cedió energía*** a la red eléctrica.

➢ Cuando la ***potencia es negativa*** (esto es, $P < 0$), el campo realizó trabajo sobre los portadores de carga de forma tal que la energía final disminuye en relación a la energía inicial. Por consiguiente se dice que el elemento de circuito le ***absorbió o disipo energía*** a la red eléctrica.

➢ Cuando la ***potencia es nula*** (esto es, $P = 0$), el campo no realizó trabajo sobre los portadores de carga de forma tal que la energía se conserva. Por consiguiente se dice que el elemento del circuito ***no aportó energía*** a la red eléctrica.

Se puede emplear la expresión (2.23) para obtener la potencia disipada en un resistor o la potencia suministrada o absorbida por una fem. Para el caso del resistor mostrado en la Fig. 2.12 (ir a la página 14) se observa que la diferencia de potencial viene dada por $V_{ba} = V_b - V_a = -iR$, al sustituirse en la potencia (2.23) resulta claramente que un resistor disipa energía por calentamiento Joule-Lenz, esto es,

$$P_R = V_{ba} i \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{Usando } V_{ba} = -iR \text{ se obtiene que } P_R = -i^2 R \\ \text{Usando } i = -\dfrac{V_{ba}}{R} \text{ se obtiene que } P_R = -\dfrac{V_{ba}^2}{R} \end{cases} \tag{2.24}$$

Para conocer cuando la potencia es suministrada o disipada por una fem se debe tener en cuenta la orientación de ésta relativa a la corriente. Para ilustrar esto se consideran que uno de los terminales de la fem se encuentra a mayor potencial que el otro, lo cual se identifica mediante una flecha orientada desde el terminal con menor potencial al terminal de mayor potencial, tal como se ilustra en la Fig. 2.13. Por otra parte, convencionalmente, la corriente fluye de una región de mayor potencial a la región de menor potencial, por ello los terminales de la fem pudieran tener polaridades invertidas al sentido de la corriente, tal como se indica en la referida figura. El punto que se encuentra a mayor potencial es designado con el símbolo + mientras que el punto de menor potencial se designa mediante el símbolo −; por esta razón el punto "$a$" se encuentra a mayor potencial que el punto "$b$", como lo requiere la expresión (2.23). En tal sentido, se concluye que

$$P_\varepsilon = V_{ba} i \implies \begin{cases} \text{En la disposición fem y corriente antiparalela se tiene que } P_\varepsilon = -\varepsilon i \\ \text{En la disposición fem y corriente paralela se tiene que } P_\varepsilon = \varepsilon i \end{cases} \tag{2.25}$$

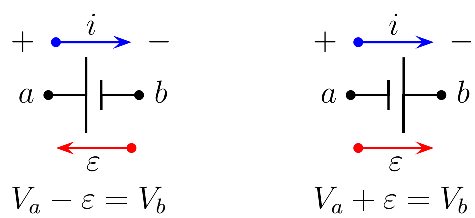


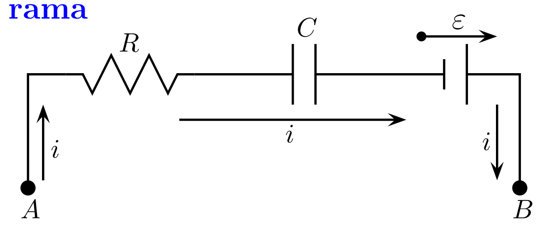

Figura 2.13: Se presentan las dos posibles orientaciones en que puede aparecer la fem con relación a la corriente que circula por éste en un circuito. En el lado izquierdo (derecho) la fem es antiparalela (paralela) a la corriente.

# 3. Análisis de circuitos

Para la construcción o diseño y el análisis de circuitos eléctricos es necesario conectar diversos conductores a dispositivos eléctricos tales como: resistores, fem, condensadores, etc. En primera aproximación estos dispositivos eléctricos suelen conectarse mediante conductores ideales[1] por los cuales circularán determinadas corrientes; estas inter-conexiones reciben el nombre de ***rama***.

**Definición de rama**

*Las región donde se inter-conectan varios dispositivos eléctricos mediante conductores se denomina rama. En tal sentido, la rama de un circuito discurre de un punto a otro por donde circula una sola corriente, llamada corriente de rama, tal como se muestra en la figura adjunta.*

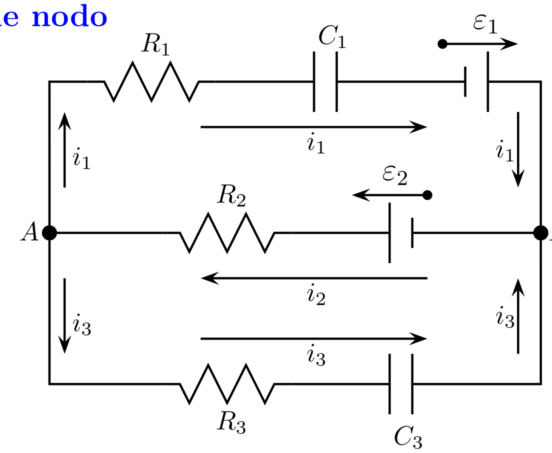



[1]Son aquellos conductores que no poseen resistencia, es decir $R = 0$, por lo cual la diferencia de potencial entre los extremos de dichos conductores es la misma.

Otro elemento fundamental para el diseño o construcción y análisis de circuitos es la conexión de varios conductores entre sí, de manera tal que varias corrientes de rama concurren en un punto, a dicho punto lo denominaremos ***nodo***. Los nodos en un circuito se presentan cuando se conecta dos o más rama.

**Definición de nodo**

*El lugar donde concurre un conjunto de corrientes en un determinado circuito se denomina nodo, éstos a su vez conservan el flujo de carga que llegan a dichos puntos, por lo que no representan una fuente ni son considerados como sumidero, es decir, no son generadores de carga ni las disipan, conservando la carga que fluye por el nodo. En la figura adjunta se muestran tres ramas conectadas a los nodos $A$ y $B$, donde confluyen las corrientes $i_1$, $i_2$ e $i_3$, por tal razón, ambos nodos son equivalentes*




Finalmente, el último elemento constitutivo que simplifica el análisis de los circuitos es conocido como ***ventana*** o ***malla***; este se define como la unión o reunión de dos o más ramas contiguas. En este contexto, las mallas o ventanas de un circuito son esencialmente diversos dispositivos electrónicos conectados por conductores ideales (en primera aproximación) de forma tal que las inter-conexiones forman un lazo o camino cerrado. Por ejemplo, para el circuito mostrado en la definición de nodo se observan dos ventanas o mallas, una de ellas es la construida por el camino cerrado que surge de seguir a la corriente $i_1$ e $i_2$, mientras que la otra maya es la construida al recorrer el camino cerrado seguido por la corrientes $i_3$ e $i_2$. A su vez, las corrientes de cada rama puede ser sustituida por una corriente (no real) que circula por toda la maya en forma de bucle, la cual se llamará ***corriente de malla*** o ***corriente de bucle***. Así, por cada malla o ventana existirá una corriente no real asociada, una regla que determina el número de ventanas o mayas en un circuito viene dada por:

$$M = r - (N - 1) = r - N + 1 \tag{3.26}$$

siendo $r$ y $N$ el número de ramas y nodos que presenta un circuito, respectivamente. Para el caso del circuito mostrado arriba se tiene tres ramas ($r = 3$) y dos nodos ($N = 2$) por lo que el circuito presenta dos ventanas o mayas ($M = 3 - 2 + 1 = 2$).

## 3.1. Leyes de Kirchhoff

El análisis de un circuito consiste en determinar todas sus corrientes de rama, para ello se requiere formular un conjunto de ecuaciones que no permitan determinar dichas corrientes; este conjunto de ecuaciones se obtienen de las conocidas Leyes de Kirchhoff, en honor al físico prusiano Gustav Kirchhoff; aun cuando no son estrictamente leyes fundamentales de la física éstas son consecuencias de la conservación de la carga y la circulación de campos electrostáticos o electromagnéticos. Ambas consecuencias permiten permiten resolver y analizar los circuitos en forma rápida y eficiente, sin necesidad de recurrir a otras leyes de la física, por lo que son de vital importancia y procederemos a enunciarlas.

Una de las propiedades más notoria de los nodos, y que constituyen la *primera ley de Kirchhoff*, es la conservación de la carga; donde éstos no pueden ser considerados como fuente ni sumideros, de lo contrario no se conservaría la carga transportada en los conductores. En este contexto, el flujo dado en (1.7) debe anularse lo que permite enunciar la primera ley de Kirchhoff de acuerdo a:

**Primera ley de Kirchhoff**

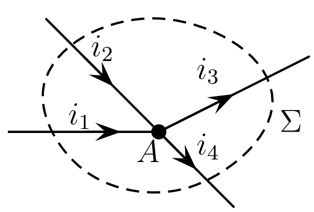
*La suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de dicho nodo, esto es,*

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}\,. \tag{3.27a}$$

El enunciado de la primera ley de Kirchhoff es una confirmación de la conservación de la carga para los circuitos eléctricos, y formalmente dicha ley pone de manifiesto la ecuación de continuidad, esto es, cada vez que se tome un nodo se podrá elegir de forma arbitraria una superficie cerrada que lo contenga; el flujo a través de dicha superficie es nulo, de lo contrario estaría saliendo o ingresando carga a la superficie en forma no balanceada. En otras palabras, como la densidad de carga dentro de la superficie en cuestión no cambia explícitamente con el tiempo ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$) entonces la divergencia de la densidad de corriente es nula ($\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\vec{0}$), por consiguiente el flujo de la densidad de corriente a través de la superficie imaginaria que encierra al nodo es nulo ($\oint\vec{J}\cdot d\vec{A}=0$), con lo cual la suma algebraica de las corrientes que pasa a través de la superficie en cuestión es cero. Para ver esto consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Se tienen cuatro corrientes que convergen en el nodo A, las cuales son denotadas por $i_1$, $i_2$, $i_3$ e $i_4$, tal como se muestra en la figura adjunta. El nodo en cuestión no es un sumidero no tampoco una fuente, por lo que la conservación de la carga impone que el flujo a través de la superficie $\Sigma$, indicada en la figura adjunta con líneas punteadas, debe anulrse.*




*Para aplicar la primera ley de Kirchhoff se debe observar en la figura de arriba que las corrientes $i_1$ e $i_2$ entran al nodo A, mientras que las corrientes $i_3$ e $i_4$ salen de dicho nodo, en consecuencia, la ecuación (3.27a) tomará la siguiente forma,*

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4\,. \tag{I}$$

*Por otra parte, el flujo de la densidad de corriente a través de la superficie cerrada $\Sigma$, es igual a la suma algebraica de las corrientes que pasan a través de dicha superficie. Estableciendo que las corrientes positivas y negativas son aquellas que salen y entran a la superficie $\Sigma$, respectivamente, se tiene:*

$$\begin{aligned}\oint\vec{J}\cdot d\vec{A} &= -i_1 - i_2 + i_3 + i_4\\ &= -(i_1+i_2) + i_3 + i_4\\ &= -(i_3+i_4) + i_3 + i_4 = 0\mathsf{A}.\end{aligned}$$

*Donde se ha usado la igualdad dada en* (I). *Si este flujo es nulo se concluye que $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, después de aplicar el teorema de la divergencia. Esto corresponde a que la carga es estacionaria, es decir, $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, en virtud de la ecuación de continuidad* (1.15).

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Para determinar las corriente que circula por cada rama de un circuito se debe tomar un conjunto de nodos inequivalentes, pero esto no proporcionarán el conjunto completo de ecuaciones necesarias que determinan todas las corrientes de las ramas que constituyen a un circuito, es por ello que se debe establece la segunda ley de Kirchhoff; en la cual correlaciona las diversas caídas o subidas del potencial eléctrico cuando se elige un recorrido en el circuito, no necesariamente cerrado, estas caídas o subidas en el potencial están a su vez condicionadas a la diferencia del potencial en cada elemento o dispositivo eléctrico que aparezca en el recorrido. Es decir, si durante el recorrido aparece un resistor entonces se tendrá una diferencia de potencial cuya valor absoluto viene dado por el producto de la corriente y la resistencia del resistor, por lo que cabria preguntarse si el voltaje en dicho elemento representa una subida o caída en potencial, esto dependerá si el recorrido es a favor o en contra de la corriente, de acuerdo a lo indicado en la Fig. 2.12. De la misma manera ocurre cuando el elemento constitutivo de la rama en una fem, en cuyo caso se tendrá una caída o subida del potencial cuando el recorrido se hace en contra o a favor de la fem ($\xrightarrow{\varepsilon}$), según lo indicado en la Fig. 1.10.

**Segunda ley de Kirchhoff**

*La suma algebraica de la diferencia de potencial de cada elemento de una malla o ventana de un circuito es cero. en otras palabras, la diferencias de potencial en cualquier camino cerrado que se tome sobre el circuito es cero, esto es:*

$$V_A + \sum_i V_i = V_A \quad \Longrightarrow \quad \sum_i V_i = 0. \tag{3.27b}$$

*Cabe destacar que los $V_i$ corresponden a la diferencia de potencial del elemento $i-$ésimo del recorrido, el cual podrá ser positivo o negativo se hay una subida o caída del potencial al atravesarlo en el recorrido de la malla.*

Consideremos un circuito eléctrico compuesto por un conjunto de resistores y varias fem, cada uno de estos elementos proporciona una transferencia de energía que denotaremos por $dW_R$ y $dW_\varepsilon$, respectivamente. La energía total transferida en el circuito se compone da la suma de las transferencia de energía proporcionada por cada elemento que conforma al sistema, esto es,

$$dW_T = dW_R + dW_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad P_T = P'_R + P_\varepsilon\,.$$

Cuando el circuito se encuentra aislado no existe intercambio de energía con su entorno, por tanto la energía se conserva y $P_T = 0$; esto nos lleva a la siguiente conservación de la energía

$$P_\varepsilon = -P_R \quad \Longrightarrow \quad \sum_m \varepsilon_m i_m = \sum_k i_k^2 R_k, \tag{3.28}$$

donde las sumas de índice $m$ y $k$ se realizan sobre todos los resistores y fem, respectivamente, que se encuentran dispuestos en el circuito. En conclusión, el balance de energía se postula de la siguiente manera,

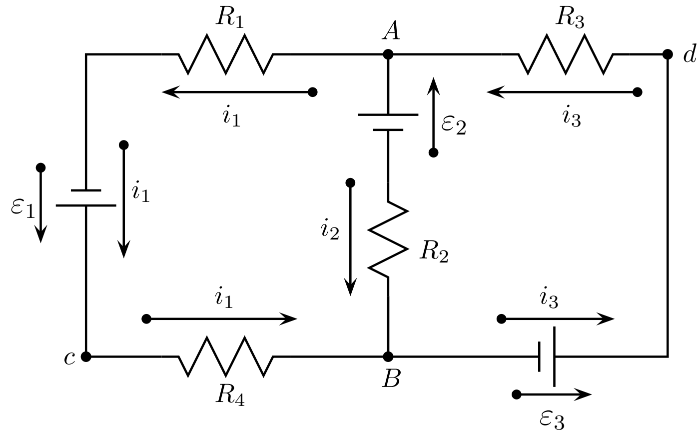
**Balance energético en un circuito**

*La energías disipadas por todas las resistencias coinciden con la energías suministradas por las baterías, tal como se expresa en* (3.28). *Dentro del circuito ocurrirá que algunas baterías suministran energía mientras que otras disipan energía, de acuerdo con* (2.25)*, en cambio las resistencia siempre disipan energía al circuito de acuerdo con* (2.24)*; el signo en esta expresión indicará disipación por cuanto puede obviarse.*

**Ejemplo 3.2** * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

*Considere que los valores de las resistencia $R_1$, $R_2$, $R_3$ y $R_4$ para el circuito mostrado en la figura de abajo son $1\Omega$, $2\Omega$, $3\Omega$ y $4\Omega$, respectivamente. Además, el circuito es alimentado por tres fuentes de fuerza electromotriz según la disposición mostrada en la figura, cuyos valores vienen dados por $\varepsilon_1 = 8\mathsf{V}$, $\varepsilon_2 = 11\mathsf{V}$ y $\varepsilon_3 = 10\mathsf{V}$. Sobre la base de este circuito se quiere obtener:*

- ✓ *La corriente que pasa por cada resistencia y la que pasa por la batería $\varepsilon_2$.*
- ✓ *El voltaje en en cada resistencia. Así como también la diferencia de potencial $V_{cd} = V_c - V_d$ entre los terminales c y d mostrados en la figura del circuito.*
- ✓ *El balance energético, esto es, la potencia suministrada por todas las baterías y la potencia disipada por todas las resistencias.*




* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Usemos el método de rama, también conocido como el método de los nodos, para el analizar el circuito mostrado en el ejemplo 3.2. En primer lugar, se elige el sentido de las corrientes en cada rama de forma arbitraria, en dicho circuito ya se han elegido las corrientes de cada rama, identificada como $i_1$, $i_2$ e $i_3$. Luego se toma un conjunto de nodos inequivalentes, en este caso los nodos $A$ y $B$ son equivalentes, por lo que se elige uno de ellos, digamos que se elige el nodo $A$. Entonces, aplicando la primera ley de Kirchhoff a dicho nodo se obtiene la siguiente ecuación

$$\text{Nodo } A\text{: } i_3 = i_1 + i_2 \quad \Longrightarrow \quad i_1 + i_2 - i_3 = 0\mathsf{A} \tag{3.29}$$

Ahora requerimos de dos ecuaciones independientes para poder determinar las corrientes de cada rama, por ello aplicamos la segunda ley de Kirchhoff sobre la ventana izquierda y derecha del circuito; la ventana izquierda es recorrida desde el nodo $A$, pasando por el punto $d$, hasta retornar al punto $A$; mientras que la ventana derecha es recorrida desde el nodo $B$, pasando por el punto $d$, hasta retornar al punto $B$. Ambos recorridos conducen al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\text{Ventana izquierda:} \quad V_A - 1\Omega i_1 + 8\mathsf{V} - 4\Omega i_1 + 2\Omega i_2 + 11\mathsf{V} = V_A \\ &\text{Ventana derecha:} \quad V_B + 10\mathsf{V} - 3\Omega i_3 - 11\mathsf{V} - 2\Omega i_2 = V_B \end{aligned}$$

simplificando términos semejantes y dividiendo por la unidad de $1\Omega$, aunado a la ecuación (3.29), se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0\mathsf{A} \\ 5i_1 - 2i_2 + 0i_3 = 19\mathsf{A} \\ 0i_1 + 2i_2 + 3i_3 = -1\mathsf{A} \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones viene dad por:

$$i_1 = 3\mathsf{A}, \quad i_2 = -2\mathsf{A} \quad \text{y} \quad i_3 = 1\mathsf{A} \tag{3.30}$$

El signo negativo en $i_2$ lo que indica es que el sentido de esta corriente es contrario al supuesto inicialmente, esto era claro inicialmente debido al sentido de la fem $\varepsilon_2$. Sin embargo, se dejará el sentido supuesto inicialmente y se trabajará con el signo negativo indicado en $i_2$.

Es claro que la corriente que pasa por la fem $\varepsilon_2$ es $i_2$; además, el voltaje en cada resistencia se obtienen mediante la "ley" de Ohm de manera que

$$V_1 = i_1 R_1 = 3\text{V}, \quad V_2 = i_2 R_2 = -4\text{V} \quad \text{y} \quad V_3 = i_3 R_3 = 3\text{V} \tag{3.31}$$

Para obtener la diferencia de potencial $V_{cd} = V_c - V_d$ entre los terminales $c$ y $d$, bastará hacer recorrido desde el punto $d$ hasta el punto $c$, pasando por cualquiera de la ramas. Existen tres recorridos posibles, el recorrido 1 donde se toma el camino $d \to A \to c$ sin pasar por $B$; el recorrido 2 que toma el camino $d \to B \to c$ sin pasar por $A$; y finalmente el recorrido 3 que toma el camino $d \to A \to B \to c$ (ó $d \to B \to A \to c$). En todos los caso se obtendrá la misma diferencia de potencial

$$\begin{aligned}
&\text{Recorrido 1:} \quad V_d - 3\Omega i_3 - 1\Omega i_1 + 8\text{V} = V_c \\
&\text{Recorrido 2:} \quad V_d - 10\text{V} + 4\Omega i_1 = V_c \\
&\text{Recorrido 3:} \quad V_d - 3\Omega i_3 - 11\text{V} - 2\Omega i_2 + 4\Omega i_1 = V_c
\end{aligned}$$

Al sustituir las corrientes dadas en (3.31) se tiene que todas estas expresiones conducen al mismo valor $V_{cd} = V_c - V_d = 2\text{V}$. El valor positivo de este resultado indica que el terminal $c$ está a mayor potencial que el terminal $d$, por lo que pueden denotarse con los símbolos $+$ y $-$, respectivamente.

Finalmente, evaluemos la potencias de cada resistencia y de cada fem, para estas últimas se debe tener presente la disposición de la fem con la corriente que pasa por ella (ver Ec. 2.25), en cuyo caso se tendrá para las resistencias

| Resistencias | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Potencias ($I^2R$) | 9W | 8W | 3W | 36W | 56W |

Y para las fem se tendrá que,

| Fuentes de fem | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_3$ | Total |
|---|---|---|---|---|
| Potencias ($\pm\varepsilon I$) | +24W | +22W | +10W | 56W |

Como todas las potencias de las fuentes de fem son positivas se concluye que las tres baterías suministran energía al circuito. Esto concluye el análisis del circuito mostrado en la figura del ejemplo 2.2.

## Referencias

Díaz-Solorzano, S., and L. González-Díaz. 2010. “Reflexiones sobre los conceptos de velocidad y rapidez de una partícula en física.” *Rev. Méx. Fis. E* 56 (2): 181–189 (Diciembre).

Jackson, J. D. 1996. “Surface charges on circuit wires and resistors play three roles.” *Am. J. Phys.* 64 (79): 855–870.

Portis, A. M. (1985). *Campos electromagneticos*. Volume Vol. 1. España: Reverté.

Reitz, J., F. Milford, and R. Christy. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Ed. 4ta. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericaca.

Saveliev, I. (1984). *Curso de física general: Mecánica y Física Molecular*. (A. Ballestero, Trad.). Volume 2. Moscú: Mir. (Trabajo original publicado en 1982).